Tema 2: Integración

18 de marzo de 2010

Función medible entre espacios medibles

$(\Omega, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espacios medibles, $f : \Omega \to Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Primeras propiedades

- La composición de funciones medibles es medible
- Si $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{T}$:

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $(Y, \mathcal{T})$ espacio topológico, $f : \Omega \to Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

Primeras propiedades

- Las funciones continuas son (Borel) medibles
- Una función continua de una función medible es medible
- Si $\mathcal{T}$ tiene una subbase numerable $\mathcal{S}$:

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(S) \in \mathcal{A} \quad \forall S \in \mathcal{S}$$

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

(i) f es medible

(ii) $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iv) $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

(v) $\{x \in \Omega : f(x) \leqslant \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

Consecuencias

$\{f_n\}$ medibles positivas. También son medibles:

- $g_1(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_2(x) = \text{ínf}\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_3(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$
- $g_4(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$

Por tanto: $\{f_n(x)\} \to f(x) \ \ \forall x \in \Omega \implies f$ medible

Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Función simple positiva: $s : \Omega \to [0, \infty[$ medible con $s(\Omega)$ finito

Descomposición canónica:

$$s(\Omega) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \quad \text{con} \quad 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \infty$$

$$A_k := \{x \in \Omega : s(x) = \alpha_k\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \ , \ A_k \cap A_j = \emptyset \quad (k \neq j) \ , \ s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$$

Recíprocamente:

$$B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{A}, \quad \beta_1, \ldots, \beta_m \in [0, \infty[\quad \Rightarrow \quad t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j} \ \text{ simple positiva}$$

Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \to [0,\infty] \text{ medible}, \ n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geqslant n\} \in \mathcal{A}$$

$$E_{nk} = \left\{ x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \ldots, n2^n)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{nk}} + n\chi_{F_n}$$

- $s_n(x) \leqslant s_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega$
- $\{s_n(x)\} \to f(x) \quad \forall x \in \Omega$
- $\sup f(\Omega) < \infty$ convergencia uniforme

Consecuencia

f, g medibles, $\alpha \in [0,\infty]$, $p \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad f+g, \ \alpha f, \ f g, \ f^p$ medibles

Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k} \qquad \int_E s\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k \cap E)$$

$$s,t \quad \text{simples}, \;\; s(x) \leqslant t(x) \;\; \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad \int_E s\, d\mu \leqslant \int_E t\, d\mu$$

$$\int_E s\, d\mu = \text{máx}\left\{ \int_E t\, d\mu : t \;\; \text{simple}, t \leqslant s \right\}$$

Integral de una función medible positiva

$f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ medible

$$\int_E f\, d\mu = \sup \left\{ \int_E s\, d\mu : s \;\; \text{simple} \;\; s \leqslant f \right\}$$

Propiedades de la integral (1)

Primeras propiedades

- $f : \Omega \to [0,\infty]$ medible $\Rightarrow \displaystyle\int_E f\,d\mu = \int_\Omega f\chi_E\,d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$
- $f : \Omega \to [0,\infty]$ medible, $\alpha \in [0,\infty] \Rightarrow \displaystyle\int_\Omega \alpha f\,d\mu = \alpha \int_\Omega f\,d\mu$
- $f, g : \Omega \to [0,\infty]$ medibles, $f \leqslant g \Rightarrow \displaystyle\int_\Omega f\,d\mu \leqslant \int_\Omega g\,d\mu$

Teorema de la convergencia monótona

Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles positivas en Ω y sea $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega$. Entonces:

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu$$

Propiedades de la integral (2)

Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^\infty f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_n \, d\mu$$

- $f : \Omega \to [0,\infty]$ medible. Integral indefinida:

$$\varphi : \mathcal{A} \to [0,\infty], \quad \varphi(E) = \int_E f \, d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

  φ es una medida y, para $g : \Omega \to [0,\infty]$ medible:

$$\int_\Omega g \, d\varphi = \int_\Omega g \, f \, d\mu$$

- Lema de Fatou: $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

Propiedades de la integral (3)

Valores extremos de la integral

$f : \Omega \to [0, \infty]$ medible:

$$\int_\Omega f\, d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}\big) = 0 \quad (f = 0 \text{ c.p.d.})$$

$$\int_\Omega f\, d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}\big) = 0 \quad (f < \infty \text{ c.p.d.})$$

Desigualdades de Hölder y Minkowski

$f, g : \Omega \to [0, \infty]$ medibles, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$:

$$\int_\Omega f\, g\, d\mu \leqslant \left(\int_\Omega f^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_\Omega g^{p^*}\, d\mu\right)^{1/p^*}$$

$$\left(\int_\Omega (f+g)^p\, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_\Omega f^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega g^p\, d\mu\right)^{1/p}$$